**Тройные интегралы**

**п.1. Понятие тройного интеграла. Свойства тройного интеграла**

Пусть функция  непрерывна в замкнутой области ( т.е. в области *V* пространства *Оxyz*). Разобьем область *V* сеткой произвольных гладких поверхностей на *n* элементарных областей  (), объемы которых обозначим . В каждой элементарной области  выберем произвольным образом точку  (), умножим значение  функции в этой точке на  и составим сумму всех таких произведений

 (1)

Сумма (1) называется *интегральной суммой* функции по области *V*.

Обозначим через  максимальный диаметр элементарной области  (максимальное расстояние между точками этой области).

***Определение.*** Если существует конечный предел интегральной суммы (1) при  () и он не зависит ни от способа разбиения области *V* на элементарные области, ни от выбора точек в них, то этот предел называется тройным интегралом от функции по области *V* и обозначается  или .

Таким образом, по определению, имеем

. (2)

***Теорема.*** Если функция  непрерывна в ограниченной замкнутой области *V*, то предел интегральной суммы (2) при  () существует и не зависит ни от способа разбиения области *V* на элементарные части, ни от выбора точек  в них.

*Свойства* тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла, а именно:

1. .

2. .

3. =+, где , а пересечение областей  и  состоит из границы, их разделяющей.

4. Если в области интегрирования , то и ; если в области *V* функция , то и .

5. Если в области интегрирования *V* функция , то , где *V –* объем области интегрирования *V*.

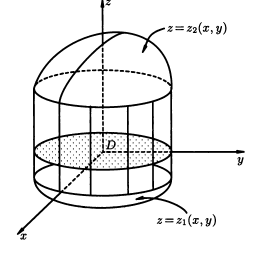
6. , где *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции  в области *V*.

7. (*теорема о среднем значении*). Если функция  непрерывна в замкнутой области *V*, то в этой области существует точка , такая что где *V –* объем области интегрирования.

**п.2. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат**

В декартовой системе координат вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть область интегрирования *V* ограничена снизу поверхностью , сверху *–* поверхностью  (), причем  и  *–* непрерывные функции в замкнутой области *D*, являющейся проекцией области *V*на плоскость*Оxy*.

Пусть область *V* *–* правильная в направлении оси *Оz*, т.е. любая прямая, параллельная оси *Оz*, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой функции , непрерывной в области *V*, справедлива формула

. (3)

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла от определенного (в скобках). При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной *z* (при этом *x* и *y* *–* const), а затем *–* двойной по области *D*. Результатом вычисления внутреннего интеграла является функция двух переменных: *x* и *y*.

Если область *D* ограничена линиями , где  и  *–* непрерывные на отрезке  функции, причем , то, переходя в формуле (3) от двойного интеграла по области *D* к повторному, получим

. (4)

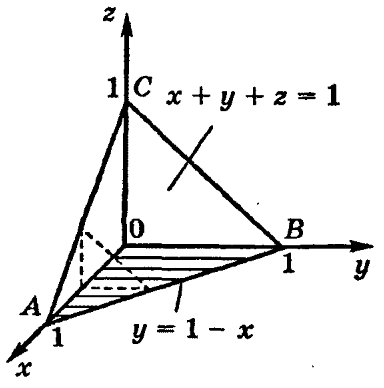
По формуле (4) вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

***Замечания***. **1.** Аналогичным образом вычисляется тройной интеграл и в том случае, когда область интегрирования является правильной в направлении осей *Оx* и *Оy*.

1. Если область *V* более сложная, чем рассмотренная выше, то ее следует разбить на конечное число областей, правильных в направлении какой-либо оси, и просуммировать результаты вычисления по этим областям.
2. Если область интегрирования *–* прямоугольный параллелепипед, задаваемый неравенствами , то

. (5)

***Пример 1.*** Вычислить , где область *V* ограничена поверхностями .

*Решение*. Чтобы найти интеграл, необходимо понимать, как выглядит область интегрирования *V*. Построим ее. Уравнения  определяют в пространстве  координатные плоскости *Оyz*, *Оxz* и *Оxy* соответственно, уравнение  – плоскость, проходящую через точки   и . Область интегрирования *V* представляет собой тетраэдр. Область *V* является правильной в направлении оси *Оz* (как и в направлении осей *Оx* и *Оy*). Её проекция на плоскость *Оxy* – треугольник *ОАВ*, является правильной в направлении оси *Оy* (и оси *Оx*). В области *V* справедливы неравенства  . Тогда, согласно формуле (4), имеем:







.

***Пример 2.*** Вычислите , если область *V* ограничена сферой  и плоскостями  (первый октант).

*Решение*. Область *V* ограничена снизу плоскостью  и сверху – поверхностью  Изобразим проекцию области *V* на плоскость *Oxy*.

Следовательно,

*х*

*у*

1

*0*

1









.

**п.3. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах**

Пусть функция непрерывна в замкнутой области . Рассмотрим подстановку



Если функции  непрерывны в области  пространства , имеют в этой области непрерывные частные производные и отличный от нуля якобиан

,

то справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

 (6)

В некоторых случаях для вычисления тройного интеграла удобнее использовать так называемые ***цилиндрические координаты***.

Пусть имеется прямоугольная система координат  пространства **R**3. Положение любой точки  в пространстве **R**3 можно определить заданием трех чисел , где – длина радиус-вектора проекции точки на плоскость *Оxy*,  – угол между этим радиус-вектором и осью *Оx*, *z* – аппликата точки .

Эти три числа называются ***цилиндрическими координатами*** точки .

Цилиндрические и декартовы прямоугольные координаты точки связаны между собой следующими соотношениями:

.

Возьмем в формуле преобразования координат (6) в качестве  цилиндрические координаты и вычислим якобиан преобразования:

.

Тогда формула замены переменных (6) примет вид:

 (7)

***Замечание.*** К цилиндрическим координатам удобно переходить в том случае, когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

***Пример 3.*** Вычислите  если область ограничена поверхностями 

*Решение*. Проекция области *V* на плоскость *Ox*y есть круг .



*х*

*у*

1

*0*

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение окружности  в этих координатах имеет вид:



Якобиан преобразования

.

Следовательно,





***Пример 4.*** Вычислите  если 

*Решение.* Перейдем к цилиндрическим координатам: 



Область *V* снизу ограничена поверхностью  (поверхностью конуса), сверху – плоскостью 

Проекцией области *V* на плоскость *Оxу* является круг 

Следовательно,



***Сферическими координатами*** точки  пространства *Оxyz* называется тройка чисел , где – длина радиус-вектора точки ,  – угол между проекцией радиус-вектора  на плоскость *Оxy* и осью *Оx*, – угол между радиус-вектором  и осью *Оz*. Сферические координаты  связаны с декартовыми прямоугольными  следующими соотношениями:



При переходе в тройном интеграле к сферическим координатам, якобиан преобразования будет иметь вид:

,

а формула замены переменных (6) запишется следующим образом:



***Замечание.*** К сферическим координатам удобно переходить тогда, когда область интегрирования представляет собой шар или его часть. В этом случае уравнение его границы (т.е. сферы)  в сферических координатах будет иметь вид . Также рекомендуется переходить к сферическим координатам и в том случае, когда подынтегральная функция имеет вид 

***Пример 5.*** Вычислите , если .

*Решение.* Каноническое уравнение сферы  имеет вид



Изобразим сферу и ее проекцию на плоскость *Оxу*.

*y*

*x*



*o*

*х*

*у*

*z*





Перейдем к сферическим координатам:



В области сферические координаты изменяются так:





Поэтому



 ▲